|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 組 | 番 |  |

レンズの形の関数（近似式の活用）

目的　『光軸上の１点*a*から出た光は、レンズのどこに入射しても、必ずレンズの後方の光軸上の１点*b*を通るように屈折する』これを実現するレンズの形$y=f(x)$はどんな関数か求める。

$$y=f(x)$$

$$a-f(x)$$

$$\sqrt{\left(a-f(x)\right)^{2}+x^{2}}$$

*y*

*x*

*a*

*- b*

$$\sqrt{\left(b-f(x)\right)^{2}+x^{2}}$$

*x*

$$f(x)$$

*x*

$$f(x)$$

*レンズ*

*屈折率n*

*a*から拡がった同位相の光の１つの波面が、ふたたび*b*で同じタイミングで1点に集まり、位相が打ち消し合わないようにするためには「レンズのどの部分を通った光も全て同じ光路長」でなければならない。

（別な言い方：光はレンズのどの部分を通って*a*から*bへ*行っても、かかる時間は(最小で)同じである：フェルマー最小時間の原理）

レンズは薄くレンズ内の光路は光軸に平行であると近似する。　するとレンズ内の*x*を通ったときの光路長*L*(*x*)は (レンズ内の光路長は経路長の屈折率*n*倍)

$$L\left(x\right)=\sqrt{\left(a-f(x)\right)^{2}+x^{2}}+nf(x)+nf(x)+\sqrt{\left(b-f(x)\right)^{2}+x^{2}}$$

どんな*x*の光路長も同じなので、全ての光路長は*x*=0の光路長$L\left(0\right)$

$$L\left(0\right)=a-f\left(0\right)+nf\left(0\right)+nf\left(0\right)+b-f\left(0\right)=a+b+2(n-1)f\left(0\right)$$

と等しい。

したがって、レンズの形の関数$y=f\left(x\right)$　を決める方程式は次のようになる。

|  |
| --- |
| $\sqrt{\left(a-f(x)\right)^{2}+x^{2}}+2nf\left(x\right)+\sqrt{\left(b-f(x)\right)^{2}+x^{2}}= a+b+2\left(n-1\right)f\left(0\right)$・・・（＊） |

この方程式（＊）の解がレンズの形$y=f\left(x\right)$である。

問題点：√をはずすと$f\left(x\right)$の４次方程式になり、この方程式をそのまま解くのは難しい。

そこで、大きい数と小さい数が混じった時に便利な近似式を使う。物理では非常によく使われる。

もし$ g(x)$が$1$より小さければ　近似式　$\left( 1+g\left(x\right)\right)^{n}≑1+ng(x)$　が成り立つ

ルートのときは$　\sqrt{1+g}=(1+g)^{\frac{1}{2}}　$として使える

【課題1】 この近似公式を利用して$\left(11\right)^{2}=\left(10+1\right)^{2}=10^{2}(1+0.1)^{2}$、$\sqrt{10}=\sqrt{9+1}=\sqrt{9}\sqrt{1+\frac{1}{9}}$を近似的に計算し、電卓で計算した値と比較せよ。

|  |
| --- |
|  |

まず、 $\left(a-f(x)\right)^{2}$ に近似式を使う。

なぜなら $\left(a-f\left(x\right)\right)^{2}=a^{2}\left(1-\frac{f\left(x\right)}{a}\right)^{2}$と書け、　$レンズの厚みf\left(x\right)は a より小さいので\left(1-\frac{f(x)}{a}\right)^{2}≑1-2\frac{f(x)}{a}　$

したがって$\left(a-f(x)\right)^{2}≑a^{2}\left(1-2\frac{f(x)}{a}\right)=a^{2}-2af(x)$

さらに、この近似を代入した $\sqrt{\left(a-f(x)\right)^{2}+x^{2}}≑\sqrt{a^{2}-2af(x)+x^{2}}$ に近似式を使う。

なぜなら $\sqrt{a^{2}-2af\left(x\right)+x^{2}}=a\sqrt{1-2\frac{f\left(x\right)}{a}+\frac{x^{2}}{a^{2}}}=a\left(1-2\frac{f\left(x\right)}{a}+\frac{x^{2}}{a^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$と書け、$-2\frac{f\left(x\right)}{a}+\frac{x^{2}}{a^{2}}$は$1$より小さいので

$$\left(1-2\frac{f\left(x\right)}{a}+\frac{x^{2}}{a^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}≑\left(1-\frac{f(x)}{a}+\frac{1}{2}\frac{x^{2}}{a^{2}}\right)$$

結局次のようになる。　$\sqrt{\left(a-f(x)\right)^{2}+x^{2}}≑a\left(1-2\frac{f\left(x\right)}{a}+\frac{x^{2}}{a^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}≑a\left(1-\frac{f(x)}{a}+\frac{1}{2}\frac{x^{2}}{a^{2}}\right)=a-f(x)+\frac{1}{2}\frac{x^{2}}{a}$

【課題2】$\sqrt{\left(b-f(x)\right)^{2}+x^{2}}$も同様に2段階で近似を使って書き直しなさい。

|  |
| --- |
|  |

方程式（＊）は近似すると

|  |
| --- |
| $a-f(x)+\frac{1}{2}\frac{x^{2}}{a}+2nf(x)+b-f(x)+\frac{1}{2}\frac{x^{2}}{b}≑a+b+2(n-1)f\left(0\right)$　・・・（＊’） |

となり、これは簡単に解くことができる。

【課題3】上の近似した方程式（＊‘）をといて、次式の空欄　　　(文字の分数式になる)を埋めよ。

$f\left(x\right)≑ f\left(0\right)-\frac{\left(　\frac{1}{a}+\frac{1}{b}　\right)}{4(n-1)}x^{2}$・・・（＊＊）

レンズの形を表す関数$y=f\left(x\right)$は近似的に２次関数（＊＊）になることが分かった。

この関数の形$y=f\left(x\right)$は$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$が変化しないように*a,b*を変えても関数の形$y=f\left(x\right)$は変わらない。

レンズの形は２次関数と分かったが、実際のレンズは球面の一部なので、次に球の断面の円を考える。

*x*

*y*

*f(0)-R*

*f(0)*

*R*

半径*R*の円が中心座標 ( *x , y* )=( 0 ,$ f\left(0\right)-R$ )にあると考えれば

円の方程式は

$$x^{2}+(y-\left( f\left(0\right)-R\right))^{2}=R^{2}$$

*y=*に直すと　（レンズ上面*y*>0は*）*

$$y=f\left(0\right)-R+\sqrt{R^{2}-x^{2}}$$

ここで*R* が非常に大きく、*x*が*R*に比べて小さい範囲として　$\sqrt{R^{2}-x^{2}}$　に近似式を使う。

【課題4】以下の空欄を埋めなさい。

$$\sqrt{R^{2}-x^{2}}=R\left(1-\frac{x^{2}}{R^{2}}\right)^{\frac{1}{ 2} }≑R\left(1-\frac{ 1}{2} \frac{x^{2}}{R^{2}}\right)= R-\frac{1}{2}\frac{x^{2}}{R} $$

半径*R*の円の方程式は近似的に次のように２次関数になる。

$y≑f\left(0\right)-R+ R-\frac{1}{2}\frac{x^{2}}{R} =f\left(0\right)-\frac{1}{2R}x^{2}$・・・（＊＊＊）

レンズの形の２次関数（＊＊）と円の方程式（＊＊＊）が同じものだとすると次式が成り立つ。

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{１}{\frac{R}{2(n-1)}}$$

レンズの公式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$を思い出すと、レンズの形を決めている円の半径*R*と焦点距離*f*には次の関係が成り立つ。

$$f=\frac{ R}{2(n-1)} $$